

## ЭХТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

### 1- §. Эҳтимолликнинг классик ва статистик таърифлари. Геометрик эҳтимоллик

**14.1.1.** Эҳтимолликлар назариясида *ҳодиса* деб, синов натижасида рўй бериши мумкин бўлган ҳар қандай фактга айтилади.

Синов натижасида албатта рўй берадиган ҳодиса *муқаррар* ( $U$ ) *ҳодиса* дейилади.

Синов натижасида ҳеч қачон рўй бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган* ( $V$ ) *ҳодиса* дейилади.

Синов натижасида рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодиса *тасодиқий ҳодиса* дейилади.

Синовнинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодиса* дейилади.

Агар битта синовнинг ўзида  $A$  ва  $B$  тасодиқий ҳодисалар бир вақтда рўй бермасалар, улар *биргаликдамас* (*биргаликда бўлмаган*) *ҳодисалар* дейилади. Агар синов натижасида бир нечта ҳодисалардан фақат биттаси рўй берса, улар *ҳодисаларнинг тўла гуруҳини* ташкил этади дейилади.

Агар  $A$  ва  $B$  ҳодисаларнинг ҳеч бирини иккинчисига нисбатан рўй бериши мумкин дейишга асос бўлмаса, бу ҳодисалар *тенг имкониятли* дейилади.

$A$  ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган  $\bar{A}$  ҳодиса  $A$  ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* дейилади.

Агар  $A$  ва  $B$  ҳодисалардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига таъсир этмаса, бу ҳодисалар *ўзаро эрки* (*боғлиқ бўлмаган*) *ҳодисалар* дейилади. Акс ҳолда  $A$  ва  $B$  ҳодисалар *боғлиқ ҳодисалар* дейилади.

**14.1.2.** Синаш натижасида тенг имкониятли  $n$  та элементар ҳодисалар рўй бериши мумкин бўлсин. Бирор  $A$  ҳодисанинг рўй бериши учун элементар ҳодисалардан  $m$  таси қулайлик туғдирсин. У ҳолда  $A$  ҳодисанинг классик эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

формула билан аниқланади.

Эҳтимолликнинг хоссалари:

1. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги 1 га тенг, яъни

$$P(U) = 1.$$

2. Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги 0 га тенг, яъни

$$P(V) = 0.$$

3. Тасодифий  $A$  ҳодисанинг эҳтимоллиги учун

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ўринли.

**14.1.3.** Эҳтимолликларни бевосита ҳисоблашда кўпинча комбинаторика формулаларидан фойдаланилади.

*Урин алмаштиришлар* деб  $n$  та турли элементларнинг бири-биридан факат жойлашиши билан фарқ қилувчи комбинацияларига айтилади.  $n$  та турли элементларнинг ўрин алмаштиришлари сони  $P_n = n!$  га тенг ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ).

*Уринлаштиришлар*  $n$  та турли элементдан  $m$  тадан тузилган комбинациялар бўлиб, улар бири-биридан  $m$  элементларнинг таркиби, ё уларнинг тартиби билан фарқ қилади. Уларнинг сони

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ ёки } A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

формулалар билан топилади.

*Группалашлар* — бири-биридан ҳеч бўлмаганда битта элементи билан фарқ қилувчи  $n$  та элементдан  $m$  тадан тузилган комбинациялардир. Уларнинг сони

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ га тенг.}$$

**14.1.4.** Ҳодисанинг *нисбий частотаси* деб ҳодиса рўй берган синовлар сонининг ўтказилган барча синовлар сонига нисбатига айтилади:

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

бу ерда  $m$  — ҳодисанинг рўй беришлари сони,  $n$  — синовларнинг умумий сони.

Синовлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг *статистик эҳтимоллиги* сифатида нисбий частотани олиш мумкин:

$$W(A) \approx P(A) = \frac{m}{n}.$$

**14.1.5.** Геометрик эҳтимоллик.  $D_1$  соҳа  $D$  соҳанинг қисми (бўлаги) бўлсин. Агар соҳанинг ўлчамини (узунлиги, юзи, ҳажми)  $\text{mes}$  орқали белгиласак, таваккалига ташланган нуқтанинг  $D$  соҳага тушиш эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{\text{mes} D_1}{\text{mes} D} \text{ га тенг.}$$

1-мисол. Қутида 3 та оқ, 7 та қора шар бор. Ундан таваккалига олинган шарнинг оқ шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш.  $A$  олинган шар оқ эканлиги ходисаси бўлсин. Мазкур синов 10 та тенг имкониятли элементар ходисалардан иборат бўлиб, уларнинг 3 таси  $A$  ходисага қулайлик туғдирувчидир. Демак,

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3.$$

2- мисол. Гуруҳда 12 талаба бўлиб, уларнинг 8 нафари аълочилар. Рўйхат бўйича таваккалига 9 талаба танлаб олинди. Танлаб олинганлар ичида 5 талаба аълочи талаба бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Синовнинг барча мумкин бўлган тенг имкониятли элементар ходисалари сони  $C_{12}^9$  га тенг. Буларнинг ичидан  $C_8^5 \cdot C_4^4$  таси танлаб олинган талабалар ичидан 5 таси аълочи талабалар ходисаси ( $A$ ) учун қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}.$$

3- мисол. Қиркма алифбонинг 10 та ҳарфидан «математика» сўзи тузилган. Бу ҳарфлар тасодифан сочилиб кетган ва қайтадан ихтиёрий тартибда йиғилган. Яна «математика» сўзи ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш.  $A$  — «Математика» сўзи ҳосил бўлди ходисаси. Тенг имкониятли мумкин бўлган элементар ходисалар сони  $n = 10!$  бўлиб,  $A$  ходисага қулайлик яратувчилари  $m = 2! \cdot 3! \cdot 2!$  бўлади. Бу ерда математика сўзида «м» 2 марта, «а» 3 марта, «т» 2 марта такрорланиши ҳисобга олинади.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151200}.$$

4- мисол. Телефонда номер тераётган абонент охирги икки рақамни эсдан чиқариб қўйди ва фақат бу рақамлар ҳар хил эканлигини эслаб қолган ҳолда уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлиги эҳтимоллигини топинг.

Ечиш.  $A$  — иккита керакли рақам терилганлик ходисаси бўлсин. Ҳаммаси бўлиб, ўнта рақамдан иккитадан нечта ўринлаштиришлар тузиш мумкин бўлса шунча, яъни  $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$  та турли рақамларни териш мумкин. Шунинг учун классик эҳтимолликка кўра

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

5- мисол. Француз табиатшуноси Бюффон (XVIII аср) тангани 4040 марта ташлаган ва бунда 2048 марта гербли томон тушган. Бу синовлар мажмуасида гербли томон тушиши частотасини топинг.

Е ч и ш.

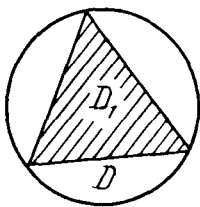
$$W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,50693.$$

6- мисол.  $R$  радиусли доирага нукта таваккалига ташланган. Ташланган нуктанинг доирага ички чизилган мунтазам учбурчак ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

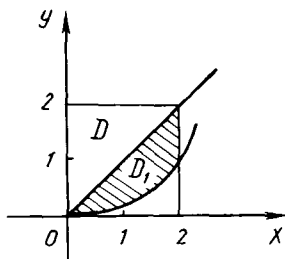
Е ч и ш.  $S(D_1)$  — учбурчакнинг юзи,  $S(D)$  — доиранинг юзи бўлсин (63- шакл).  $A$  — нуктанинг учбурчакка тушиши ходисаси. У ҳолда

$$P(A) = \frac{S(D_1)}{S(D)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,4137.$$

$$P(A) \approx 0,4137.$$



63- шакл



64- шакл

7- мисол.  $[0, 2]$  кесмадан таваккалига иккита  $x$  ва  $y$  сонлари танланган. Бу сонлар  $x^2 \leq 4y \leq 4x$  тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

Е ч и ш.  $(x, y)$  нуктанинг координатлари

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантиради. Бу —  $(x, y)$  нукта томони 2 га тенг квадрат нукталари тўпламидан таваккалига танланишини билдиради.

Бизни қизиқтираётган  $A$  ходиса танланадиган  $(x, y)$  нукта штрихланган фигурага тегишли бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда рўй беради (64- шакл). Бу фигура координатлари  $x^2 \leq 4y \leq 4x$  тенгсизликни қаноатлантирадиган нукталарнинг тўплами сифатида ҳосил қилинган. Демак, изланаётган эҳтимоллик штрихланган фигура юзининг квадрат юзига нисбатига тенг, яъни

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx}{4} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2}{4} = \frac{\frac{4}{2} - \frac{8}{12}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Демак, } P(A) = \frac{1}{3}.$$

1. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда, унинг 5 га каррали бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ж: 0,2.

2. Карточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлари ёзилган. Таваккалига тўртта карточка олиниб, уларни қатор қилиб терилганда жуфт сон ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж:  $\frac{4}{9}$ .

3. Қутида 12 та оқ ва 8 та қизил шар бор. Таваккалига

а) битта шар олинганда унинг оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг;

б) битта шар олинганда унинг қизил бўлиши эҳтимоллигини топинг;

в) 2 та шар олинганда уларнинг турли рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг;

г) 8 та шар олинганда уларнинг 3 таси қизил рангли бўлиши эҳтимоллигини топинг;

д) 8 та шар олинганда қизил рангли шарлар 3 тадан кўп бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг;

Ж: а)  $\frac{3}{5}$ ; б)  $\frac{2}{5}$ ; в)  $\frac{48}{95}$ ; г)  $\approx 0,35$ ; д)  $\approx 0,6117$ .

4. Иккита ўйин соккаси барабар ташланганда қуйидаги ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимолликларини топинг:

A — тушган очколар йиғиндиси 8 га тенг.

B — тушган очколар кўпайтмаси 8 га тенг.

C — тушган очколар йиғиндиси уларнинг кўпайтмасидан катта.

Ж:  $P(A) = \frac{5}{36}$ ;  $P(B) = \frac{1}{18}$ ;  $P(C) = \frac{11}{36}$ .

5. Танга 2 марта ташланганда ақалли бир марта гербли томон тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж:  $P(A) = \frac{3}{4}$ .

6. Қутичада 6 та бир хил (номерланган) кубик бор. Таваккалига битта-битадан барча кубиклар олинганда кубикларнинг номерлари ўсиб бориш тартибида чиқиши эҳтимоллигини топинг.

Ж:  $P(A) = \frac{1}{720}$ .

7. Қутида 5 та бир хил буюм бўлиб, уларнинг 3 таси бўялган. Таваккалига 2 та буюм олинганда улар орасида:

а) битта бўялгани бўлиши;

б) иккита бўлгани бўлиши;

в) ҳеч бўлмаганда битта бўялгани бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

8. Учлари (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) нуқталарда бўлган квадратга (x, y) нуқта ташланади. Бу нуқтанинг координаталари  $y < 2x$